Mødet den 11$^{\text{te}}$ Marts.

Hr. Professor *Steen* meddelte *Bidrag til Theorien af Integration af Differentialligninger af første Orden og første Grad.*

1. Ved Integrationen af Differentialligninger af første Orden og første Grad arbejder man saa godt som udelukkende paa de Variables Separation (Udskillelse) ved Hjælp af en passende Substitution. Der gives kun saare faa Tilfælde, hvor Integrationen er udførlig ved Hjælp af den Eulerske Faktor, og af disse ere endda nogle ogsaa modtagelige for Substitutioner, som bevirke Separation af de Variable. Men de Substitutioner, som bringes i Anvendelse, bære alle et vist Præg af Tilfældighed og mangle enhver theoretisk Begrundelse a priori, ligesom de indbyrdes staae uden Forbindelse. Dette gjælder ikke mindre om de bekjendte Hovedgrupper af Differentialligninger af en noget mere almindelig Form, end om de mange ganske specielle Tilfælde, for hvilke særegne Substitutioner ved heldige Træf have vist sig brugbare. Det er et naturligt Ønske at faae tilvejebragt en saa omfattende almindelig Theori som muligt istedenfor de spredte Methoder, der foreligge. Ved Betragtningen af de tre bekjendte Hovedgrupper af Differentialligninger (foruden dem, der umiddelbart tilstede de Variables Udskillelse), næmlig:

den *homogene* Ligning $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

den *lineære* $$\frac{dy}{dx} = Py + Q,$$

og *Riccatis* Ligning $$\frac{dy}{dx} = ax^m - by^2, \tag{2}$$

paatrænger sig strax den Bemærkning, at den lineære Ligning behandles ved en noget anden Fremgangsmaade end de andre, idet der indføres *to* nye Variable, der hver for sig bestemmes ved Ligningens Deling i to, medens de andre behandles ved

Substitutioner af *een* ny afhængig Variabel. Föjes hertil, at den lineære Ligning af første Orden som Led i den hele Gruppe af lineære Ligninger i Almindelighed er ret vel stillet i systematisk Henseende, og at den derfor anvendte Substitution i Virkeligheden kun er en skjult Anvendelse af *Methoden af den arbitrære Konstants Variation*, som udgjör et almindeligt, men ikke ofte nok benyttet Hjælpemiddel for Integralregningen, saa synes der at være Grund til alene at arbejde paa en Forbindelse imellem de to andre Grupper. Udbyttet af nogle ret heldige Forsøg i denne Retning meddeles her tilligemed de Frugter, de ogsaa i anden Henseende have ydet.

2. Gaaer man ud fra (1), som er den almindeligste af de to Ligninger (1) og (2) og bliver integrabel ved den bekjendte Substitution $z = \frac{y}{x}$, saa opstaaer Spörgsmaalet om, hvilke Ligninger af Formen

$$\frac{dy}{dx} = f(\varpi(x, y)) \tag{3}$$

der ere integrable ved Substitutionen

$$z = \varpi(x, y). \tag{4}$$

Da man heraf faaer

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varpi}{dy} f(z), \tag{5}$$

saa kommer det an paa at finde ϖ saaledes bestemt, at de Variable i (5) kunne skilles ud fra hinanden (separeres). *Kun tre* Tilfælde ere mulige; höjre Side af (5) kan *enten* være uafhængig af x, *eller* indeholde x alene i en for begge fælles Faktor uafhængig af z, *eller* indeholde z paa samme Maade.

a. Höjre Side af (5) bliver uafhængig af x, naar

$$\frac{d\varpi}{dx} = a, \qquad \frac{d\varpi}{dy} = b,$$

altsaa naar $\varpi(x, y) = ax + by + c.$

Som Følge heraf *bliver Ligningen*

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \tag{6}$$

integrabel ved $z = ax + by + c,$

som giver $$\frac{dz}{dx} = a + bf(z). \tag{7}$$

Höjre Side af (5) kunde ogsaa blive afhængig af z alene derved, at $\frac{d\varpi}{dx}$ og $\frac{d\varpi}{dy}$ vare Funktioner af z alene, men dette Tilfælde vil indbefattes under det næste.

b. Antages höjre Side af (5) at indeholde som fælles Faktor en Funktion af x alene, saasom X (der kan være 1 og saaledes giver det i Slutningen af a. berørte Tilfælde), saa har man

$$\frac{d\varpi}{dx} = XF(\varpi), \qquad \frac{d\varpi}{dy} = XF_1(\varpi). \tag{8}$$

Ved Elimination af X faaes den partielle Differentialligning

$$F_1(\varpi)\frac{d\varpi}{dx} - F(\varpi)\frac{d\varpi}{dy} = 0, \tag{9}$$

som integreret ved bekjendte Methoder giver

$$y + \frac{F(\varpi)}{F_1(\varpi)}x = \varphi(\varpi), \tag{10}$$

hvor φ betegner en arbitrær Funktion. (10) angiver en Betingelse, som ϖ *nødvendig* maa opfylde for at tilfredsstille (8); derimod behøver denne Betingelse ikke at være *tilstrækkelig*, saa at der maa gjöres endelig Prøve paa ϖ's Brugbarhed i den ved (10) bestemte Form, og dette sker simplest ved selve Substitutionen (4), der altsaa bör lede til en Ligning af Formen (5), hvorom (8) gjælder.

Nu skulde altsaa Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = f\big(y + x\,\psi(\varpi(x,y))\big), \tag{11}$$

hvor $$\varpi(x,y) = y + x\,\psi(\varpi(x,y)),$$

være integrabel ved Substitutionen

$$z = \varpi(x,y) = y + x\,\psi(z). \tag{12}$$

Deraf faaes $$\frac{dz}{dx} = f(z) + \psi(z) + x\,\psi'(z)\frac{dz}{dx}, \tag{13}$$

som *ikkun i to Tilfælde tilsteder Separation.*

α. Man kan have

$$\psi'(z) = 0, \quad \psi(z) = \frac{a}{b}, \quad z = \frac{ax+by}{b}, \quad \frac{dy}{dx} = f(ax+by),$$

som er behandlet ovenfor (se (6)).

β. Eller man kan have

$$\psi'(z) = \frac{1}{a}; \quad \psi(z) = \frac{z-b}{a}, \quad a\,\psi(z) + b = z = y + x\,\psi(z),$$

følgelig $\quad \psi(z) = -\frac{y-b}{x-a} \quad$ eller $\quad z = \psi\left(\frac{y-b}{x-a}\right)$

med forandret Betydning af ψ. Man kommer derved til Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y-b}{x-a}\right), \tag{14}$$

hvorunder (1) indbefattes for $a = 0$, $b = 0$.

c. Hvis endelig höjre Side i (5) skal indeholde z alene i en fælles Faktor uafhængig af x, saa maa

$$\frac{d\varpi}{dx} = X f(\varpi)\, F(\varpi), \quad \frac{d\varpi}{dy} = X_1\, F(\varpi), \tag{15}$$

idet X og X_1 ere to Funktioner af x. Heraf udledes

$$X_1 \frac{d\varpi}{dx} - X f(\varpi) \frac{d\varpi}{dy} = 0, \tag{16}$$

hvis tilsvarende Integral er

$$y + f(\varpi) \int \frac{X}{X_1}\, dx = \varphi(\varpi). \tag{17}$$

Ved denne Bestemmelse af ϖ kan gjöres samme Bemærkning som ovenfor gjordes i Anledning af det ved (10) fundne ϖ, saa at ogsaa her en endelig Prøvelse af Substitutionens Virkning maa ske.

Det maa altsaa nu undersøges, hvorvidt virkelig en Ligning af Formen

$$\frac{dy}{dx} = f\big(y + X\psi(\varpi(x, y))\big), \tag{18}$$

idet $\qquad \varpi(x, y) = y + X\psi(\varpi(x, y)),$

er integrabel ved at man sætter

$$z = \varpi(x, y) = y + X\psi(z). \tag{19}$$

Men heraf faaes $\quad \frac{dz}{dx} = f(z) + \frac{d\,.\,X\psi(z)}{dx},$

som *kun tilsteder de Variables Udskillelse i to Tilfælde.*

α. Man kan have

$$\frac{d\,.\,X\psi(z)}{dx} = \frac{a}{b}, \quad X\psi(z) = \frac{a}{b}x,$$

følgelig $\quad X = x, \quad \psi(z) = \frac{a}{b},$

svarende til Ligning (6).

β. Man kan ogsaa have

$$\frac{d \,.\, X\psi(z)}{dx} = F(z), \quad X\psi(z) = x\,F(z),$$

altsaa $\quad X = x, \quad \psi(z) = F(z),$

svarende til Ligning (14), idet (19) bliver til (12).

Der gives altsaa ingen andre Ligninger af Formen (3) *integrable ved Substitutionen* (4) *end*

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \qquad (6)$$

$$\text{og} \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y-b}{x-a}\right). \qquad (14)$$

Derimod vil (13) bragt paa Formen

$$\frac{dx}{dz} + \frac{\psi'(z)}{f(z)+\psi(z)}\,x = \frac{1}{f(z)+\psi(z)},$$

som er lineær, have den primitive Ligning

$$x = e^{-\int \frac{\psi'(z)\,dz}{f(z)+\psi(z)}} \left[\int e^{-\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)+\psi(z)}} dz + C\right], \qquad (20)$$

saa at Elimination af z imellem (12) og (20) frembringer den til (11) svarende primitive Ligning.

Altsaa *enhver Ligning af Formen*

$$\frac{dy}{dx} = f\big(y + x\,\psi(\varpi(x,y))\big), \qquad (11)$$

hvor $\quad \varpi(x,y) = y + x\,\psi(\varpi(x,y)),$

er integrabel ved Substitutionen

$$z = y + x\,\psi(z),$$

som gjör den afhængig af en lineær Differentialligning.

Som Exempel herpaa mærkes

$$\frac{dy}{dx} = f\left(y + \cfrac{x}{y + \cfrac{x}{y + \cfrac{x}{y \ldots}}}\right),$$

der ved
$$z = y + \frac{x}{z}.$$

fører til
$$x = e^{\int \frac{dz}{z^2 f(z) + z}} \left(\int e^{-\int \frac{z f'(z)\, dz}{z f(z) + 1}} dz + C \right).$$

Er saaledes $f(z) = z$, faaes
$$z^2 - yz - x = 0$$
og
$$x = \frac{z\left(1 + C\sqrt{z^2+1}\right)}{z^2+1},$$
hvorimellem z elimineres.

3. Af Ligningerne (6) og (14) afhænger for Exempel
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right). \tag{21}$$

Sættes næmlig
$$a\alpha + b\beta + c = 0,$$
$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$
hvorved α og β ere bestemte, faaes, saafremt ikke $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$,
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a(x-\alpha) + b(y-\beta)}{a_1(x-\alpha) + b_1(y-\beta)}\right) = F\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

Er $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, bliver höjre Side af (21) konstant, men for $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \gtrless \frac{c}{c_1}$, som gjör $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$, faaes, idet $a_1 = \frac{ab_1}{b}$,
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{b(ax+by) + cb}{b_1(ax+by) + c_1 b}\right) = F(ax+by).$$

4. Anvendes Substitutionen (4) paa en mere sammensat Ligning, der dog er valgt med stadigt Hensyn paa simple Former, næmlig paa
$$X \frac{d\varpi}{dy} \frac{dy}{dx} = f(\varpi(x, y)), \tag{22}$$
hvor X indeholder x alene, faaes
$$X \frac{dz}{dx} = X \frac{d\varpi}{dx} + f(z). \tag{23}$$

Da heri sidste Led af höjre Side ikke indeholder x, vil Separation alene være mulig, naar det samme gjælder om første Led, altsaa naar
$$X \frac{d\varpi}{dx} = F(z) = F(\varpi). \tag{24}$$

Men heraf faaes $$\int \frac{d\varpi}{F(\varpi)} = \int \frac{dx}{X} + Y,$$

idet Y er en Funktion af y. Da venstre Side heri forestiller en hvilkensomhelst Funktion af ϖ, kan man sætte

$$\varphi(\varpi) = Y_1 + X_1,$$

hvilket dog ogsaa kan skrives paa en af følgende to Maader

$$\varphi(\varpi) = \mathrm{l}.\, Y_1 + \mathrm{l}.\, X_1 = \mathrm{l}.\, Y_1 X_1,$$

$$\varphi(\varpi) = \mathrm{l}.\, Y_1 - \mathrm{l}.\, X_1 = \mathrm{l}.\, \frac{Y_1}{X_1}.$$

Man erholder derved kun følgende tre Tilfælde

$$f(\varpi(x,y)) = f(\psi_1(y) + \psi_2(x)),$$

$$f(\varpi(x,y)) = f(\psi_1(y)\,.\,\psi_2(x)),$$

$$f(\varpi(x,y)) = f\left(\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(x)}\right),$$

som alle gjöre (22) integrabel, saafremt tillige X og F kunne bestemmes saaledes, at (24) er tilfredsstillet. Men denne Bestemmelse er let, thi for det første Tilfælde haves

$$X\psi_2'(x) = F(z), \quad \text{altsaa} \quad X = \frac{1}{\psi_2'(x)}, \quad F(z) = 1,$$

for det andet

$$X\psi_2'(x)\,\psi_1(y) = F(z), \quad \text{altsaa} \quad X = \frac{\psi_2(x)}{\psi_2'(x)}, \quad F(z) = z,$$

og for det tredie

$$-\frac{X\psi_2'(x)\,\psi_1(y)}{(\psi_2(x))^2} = F(z), \quad \text{altsaa} \quad X = -\frac{\psi_2(x)}{\psi_2'(x)}, \quad F(z) = z.$$

Som Følge heraf erholdes følgende integrable Differentialligninger af Formen (22):

$$\frac{\psi_1'(y)}{\psi_2'(x)}\,\frac{dy}{dx} = f(\psi_1(y) + \psi_2(x)),$$

der ved at $\psi_1(y)$ og $\psi_2(x)$ tages til Variable føres tilbage til (6), idet $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$;

$$\frac{(\psi_2(x))^2\,\psi_1'(y)}{\psi_2'(x)}\,\frac{dy}{dx} = f(\psi_1(y)\,.\,\psi_2(x)), \tag{25}$$

der er et nyt Tilfælde, som imidlertid tilsteder en simplere Form, hvorom nedenfor;

$$- \frac{\psi_1'(y)}{\psi_2'(x)} \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(x)}\right),$$

som let føres tilbage til (1), idet $\psi_1(y)$ og $\psi_2(x)$ gjöres til de Variable.

Naar i (25) sættes x for $\psi_2(x)$, y for $\psi_1(y)$, faaes den meget simple Ligning

$$x^2 \frac{dy}{dx} = f(yx), \tag{26}$$

staaende i samme Forbindelse med (25), som (6) og (1) med de oven anførte Ligninger. Havde man sat $x-a$ for $\psi_2(x)$ og $y-b$ for $\psi_1(y)$, vilde man have faaet en Ligning staaende i samme Relation til (25), som (14) til (1).

Integrationen af (26) sker ved Substitutionen (4), som her er $z = yx$ og giver

$$x \frac{dz}{dx} = z + f(z). \tag{27}$$

Følgende Exempel

$$x^2 \frac{dy}{dx} + yx + e^{yx} = a,$$

behandlet af *Dienger* (Differential- u. Integralrechn. Stuttgart 1857), ved først at sætte $y = uv$ og derpaa bestemme v som $\frac{c}{x}$, har Formen (26) og ændres umiddelbart til (jfr. (27))

$$x \frac{dz}{dx} + e^z = a,$$

hvoraf
$$\int \frac{e^{-z}\,dz}{a e^{-z} - 1} = \mathrm{l}.\,x,$$

altsaa
$$x^a (a e^{-yx} - 1) = C.$$

Ligeledes, naar i *Riccatis* Ligning (2) haves $m = -2$, hvilket Tilfælde plejer at behandles ved Substitutionen $y = \frac{1}{z}$, der gjör den homogen, faaes først

$$x^2 \frac{dy}{dx} = a - b(xy)^2$$

og dernæst ifølge (27)

$$x \frac{dz}{dx} = z + a - b z^2.$$

Der er dog herved at bemærke, at den nævnte Fremgangsmaade altid kan anvendes paa (26); sættes først $x = \frac{1}{x_1}$ eller $y = \frac{1}{y_1}$, bliver Ligningen homogen og behandles som saadan, men disse Operationer samles netop i een ved den her angivne Methode. (26) bör derfor rettest behandles som et selvstændigt Tilfælde.

5. Af det Udviklede fremgaaer, at *Ligningerne* (6) *og* (26) *vel kunne fortjene i theoretisk Henseende at staae ved Siden af* (1), at *de alle henhøre til samme Gruppe af integrable Differentialligninger,* næmlig til dem, som integreres ved Hjælp af Substitutionen (4), og at *de ere de eneste af denne Gruppe, som have de i* (3) *og* (22) *angivne simple Former.*

Derimod er det at forudse, at den samme Substitution (4) er anvendelig paa andre og mere sammensatte Differentialligninger; paa Ligninger, der i Simpelhed kunne stilles ved Siden af de her nævnte, vil den næppe kunne komme til Anvendelse. Her skal Opmærksomheden endnu blot henledes paa tre Former, der synes at være de simpleste næst de anførte, og tilmed paa analog Maade ere knyttede til hver sin af dem. X betegner en hvilkensomhelst Funktion af x i alle tre Ligninger.

a. $$\frac{dy}{dx} = Xf(ax + by + c) - \frac{a}{b} \tag{28}$$

bliver for $z = ax + by + c$ til

$$\frac{dz}{dx} = bXf(z).$$

b. $$\frac{dy}{dx} = Xf\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \tag{29}$$

gjöres ved $z = \frac{y}{x}$ til

$$x\frac{dz}{dx} = Xf(z).$$

Et specielt Exempel paa denne Lignings Anvendelse til Løsning af et geometrisk Problem (Generalisation af et, som findes i min Differential- og Integralregn. Kbhvn. 1860 p. 171) er følgende.

At bestemme den Kurve, hvis Normals Projection paa Radius vektor fra Begyndelsespunktet er en given Funktion af x.

Den afhænger af Ligningen

$$y\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{y^2 + x^2}\, f(x),$$

og Integrationen giver

$$\sqrt{y^2 + x^2} = cx - x\int\frac{f(x)\,dx}{x^2}.$$

Geometrien giver Anledning til mange Problemer, afhængige af (29).

c. Endelig vil Ligningen

$$x^2\frac{dy}{dx} = Xf(xy) - xy \tag{30}$$

blive integrabel ved $z = yx$, som giver

$$x\frac{dz}{dx} = Xf(z).$$

6. Det er igjennem (30) lykkedes at knytte den ellers noget isolerede Riccatis Ligning til de her omhandlede Differentialligninger. Først vil næmlig Ligning (2) for $m = -4$ eller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x^4} - by^2$$

kunne omformes til

$$x^2\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x^2} - b(yx)^2,$$

og derpaa giver Substitutionen

$$yx = u + \frac{1}{b}$$

Ligningen

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{a}{x^2} - bu^2$$

eller

$$x^2\frac{du}{dx} = \frac{a - b(ux)^2}{x} - ux,$$

henhørende under (30) og integrabel ved $z = ux$, som giver

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a - bz^2}{x}.$$

Sammenfattes de her brugte Substitutioner i een, frembragt ved Elimination af u, faaes netop den bekjendte

$$y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{bx},$$

som imidlertid er fundet ad en ganske anden Vei, uden nogen theoretisk Begrundelse, ved en blot prøvende Fremgangsmaade.

Sættes dernæst Riccatis Ligning (2) under Formen

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax^{m+2} - b(yx)^2, \tag{31}$$

saa vil samme Substitution som ovenfor $\left(yx = u + \frac{1}{b}\right)$ frembringe

$$x^2 \frac{du}{dx} = \frac{ax^{m+4} - b(ux)^2}{x} - ux,$$

og dernæst giver $z = ux$

$$x^2 \frac{dz}{dx} = ax^{m+4} - bz^2. \tag{32}$$

Endelig vil denne Ligning for $x = -\frac{1}{x_1}$ antage Formen

$$\frac{dz}{dx_1} = a(-x_1)^{-(m+4)} - bz^2 \tag{33}$$

eller

$$x_1^2 \frac{dz}{dx_1} = a(-x_1)^{-(m+2)} - bz^2. \tag{34}$$

Heraf følger, at *hvis den ene af Ligningerne*

$$\frac{dy}{dx} = ax^m - by^2 \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dx} = a(-x)^{-(m+4)} - by^2 \quad \text{(jfr. (2) og (33))}$$

eller af

$$x^2 \frac{dz}{dx} = ax^{m+4} - bz^2 \quad \text{og} \quad x^2 \frac{dz}{dx} = a(-x)^{-(m+2)} - bz^2 \quad \begin{cases} \text{jfr. (32)} \\ \text{og (34)} \end{cases}$$

kan integreres, saa kan den anden ogsaa.

Sættes i (32) almindeligere

$$x = x_1^\alpha, \qquad z = \frac{1}{y_1},$$

saa faaes

$$\frac{dy_1}{dx_1} = b\alpha x_1^{-(\alpha+1)} - a\alpha x_1^{\alpha m + 3\alpha - 1} y_1^2,$$

som vil antage Formen (2) igjen, saafremt

$$\alpha m + 3\alpha - 1 = 0, \qquad \alpha = \frac{1}{m+3},$$

hvorved den bliver

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{b}{m+3} x_1^{-\frac{m+4}{m+3}} - \frac{a}{m+3} y_1^2. \tag{35}$$

Altsaa *hvis den ene af Ligningerne* (2) *og* (35) *er integrabel, saa gjælder det samme om den anden.*

Da nu (2) er integrabel for $m = -2$, saa gjælder det samme om (35) for $-\frac{m+4}{m+3} = -2$, der falder sammen med (2); men gjöres $m = -4$, faaes for (35) $-\frac{m+4}{m+3} = 0$, for $m = 0$ erholdes $-\frac{m+4}{m+3} = -\frac{4}{3}$, deraf findes igjen $-\frac{8}{5}$, $-\frac{12}{7}$, $-\frac{16}{9}$ o. s. v. Omvendt, sætter man efterhaanden $-\frac{m+4}{m+3} = -4$, $= 0$, $= -\frac{4}{3}$, $= -\frac{8}{5}$ o. s. v., erholdes $m = -\frac{8}{3}$, $= -\frac{12}{5}$, $= -\frac{16}{7}$, $-\frac{20}{9}$ o. s. v. Man kommer saaledes til den bekjendte Række af negative Brøker imellem -4 og -2, samt imellem -2 og 0, som indsatte for m i (2) gjöre denne integrabel. Overgangen fra (2) til (33) eller fra m til $-(m+4)$, som ovenfor er omtalt, vil kunne give den samme Række i omvendt Orden saaledes:

$$m = -\frac{4}{1},\ -\frac{8}{3},\ -\frac{12}{5} \cdots -2 \cdots -\frac{12}{7},\ -\frac{8}{5},\ -\frac{4}{3},\ 0,$$

$$-(m+4) = 0,\quad -\frac{4}{3},\ -\frac{8}{5} \cdots -2 \cdots -\frac{16}{7},\ -\frac{12}{5},\ -\frac{8}{3},\ -\frac{4}{1}.$$

Sætter man i (31) $m = p-2$ og foretager samme Ændring i den af (33) ved Multiplikation med x^2 frembragte Ligning, erholdes to Ligninger af Formerne

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{dy}{dx} &= ax^p - b(yx)^2, \\ x^2\frac{dy}{dx} &= a(-x)^{-p} - b(yx)^2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Hvis den ene af Ligningerne (36) *er integrabel, saa er den anden det ogsaa.*

7. Det ligger nær paa (36) at forsøge Methoden af den arbitrære Konstants Variation, men man kommer stedse tilbage til Ligninger, der føre til (2) igjen; hvis derimod sættes

$$yx = cz,$$

faaes som svarende henholdsvis til den første og den anden (36) Ligningerne

$$cx\frac{dz}{dx} + zx\frac{dc}{dx} = ax^p - b(cz)^2 + cz,$$

$$cx\frac{dz}{dx} + zx\frac{dc}{dx} = a(-x)^{-p} - b(cz)^2 + cz.$$

Disse deles atter i to paa følgende Maade:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dz}{dx} &= z - bcz^2 \\ z\frac{dc}{dx} &= ax^{p-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{og} \quad \left\{\begin{aligned} x\frac{dz}{dx} &= z - bcz^2 \\ z\frac{dc}{dx} &= a(-x)^{-p-1}, \end{aligned}\right.$$

eller simplere, idet $z = \frac{1}{u}$,

$$\left.\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u - bc &= 0 \\ \frac{dc}{dx} - ax^{p-1}u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{og} \quad \left\{\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u - bc &= 0 \\ \frac{dc}{dx} - a(-x)^{-p-1}u &= 0. \end{aligned}\right.$$

Disse danne et Par sammenhørende Ligninger, som behandlede ved Elimination af u og $\frac{du}{dx}$ ved Hjælp af den af sidste Ligning dannede Differentialligning give følgende lineære Differentialligning af anden Orden til Bestemmelse af c.

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d^2c}{dx^2} - (p-2)\frac{dc}{dx} - abx^{p-1}c &= 0, \\ x\frac{d^2c}{dx^2} + (p+2)\frac{dc}{dx} - ab(-x)^{-p-1}c &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Herved er *Integrationen af Riccatis Ligning gjort afhængig af en ny lineær Differentialligning af anden Orden.* Endvidere indses, efter hvad der er bekjendt om Riccatis Ligning, at Ligningerne (37) ere integrable for følgende Værdier af $p = m + 2$:

$$p = -2, \; -\tfrac{2}{3}, \; -\tfrac{2}{5} \; \cdots \; 0 \; \cdots \; \tfrac{2}{7}, \; \tfrac{2}{5}, \; \tfrac{2}{3}, \; 2,$$

almindelig
$$p = \frac{2}{2i+1},$$

hvor i er hvilkensomhelst hel; $i = \infty$ giver $p = 0$, $\infty > i > 0$ giver $0 < p < 2$, for $i = 0$ faaes $p = 2$, for $i = -1$ dernæst $p = -2$, og for $-1 > i > -\infty$ endelig $-2 < p < 0$. Men Resultaterne af Integrationen af (37) i disse Tilfælde vilde altid blive meget sammensatte, idet man næmlig, efterat have fundet y som Funktion af x saaledes som den tilfredsstiller (36), har

$$yx = cz = \frac{c}{u},$$

og naar nu $c = yxu$ indsættes i den første af de sammenhørende Ligninger, kan denne integreres og bestemmer saaledes *u* som Funktion af *x*. Tilsidst faaes da *c* af den anden af de sammenhørende Ligninger.

Selskabet bifaldt, at Hr. Cand. mag. *Hertzsprung*'s belønnede Priisskrift, »Beregningen af *N. Maskelynes* Iagttagelser af smaa Stjerner«, optages i Selskabets Skrifter.

I Mødet var fremlagt:

Fra Academia Real das Sciencias de Lisboa.

Memorias, Classe de Sciencias Naturaes Tome XII Part. 2.
— — II. Serie — I.
— — — — II Part. 1 & 2.
— — — — III — 1 & 2.

Fra Akademie der Wissenschaften i München.

Sitzungsberichte 1863. II Hefte 2 & 3.

Mødet den 1ste April.

Hr. Prof. *L. Müller* forelagde en *Afhandling om de religiøse Symboler af Stjerne-, Kors- og Cirkel-Form hos Oldtidens Culturfolk*, som vil blive meddelt i »Skrifterne«.

I Mødet var fremlagt:

Fra Academia Real das Sciencias de Lisboa.

Memorias, Classe de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes
Nova Serie Tome I Part. 1, 2.
— — II — 1, 2.
— — III — 1.